



Control 2

P1|

a) Considere las funciones $f(x) = x$, $g(x) = \sin(x)$, y las constantes $a = 0$, $b = \pi$. Encuentre el valor de ξ que verifica la ecuación.

$$\int_a^b f(x) \sin(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx + f(b) \int_\xi^b g(x) dx \quad (1)$$

b) Sean f, g , funciones continuas en \mathbb{R} , con f monótona, derivable y con derivada continua. Demuestre que para $\forall a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$ existe $\xi \in [a, b]$ demuestre que existe $\xi \in [a, b]$ que satisface la ecuación (1) de la parte a).

Indicación: Defina $G(x) = \int_a^x g(t) dt$ e integre por partes.

P2|

a) Dado $n \in \mathbb{N}$, calcule las integrales

$$\int_0^1 \sin(n\pi x) dx \text{ y } \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx$$

y verifique que ambas tienden a 0 cuando $n \rightarrow \infty$

b) Para demostrar que, en general

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sin(n\pi x) f(x) dx = 0, \quad (2)$$

para toda función f derivable, con derivada acotada, defina $I_n = \int_0^1 \sin(n\pi x) f(x) dx$

y realice lo siguiente:

b1) Usando el cambio de variable $x = u + \frac{1}{n}$, pruebe que

$$I_n = \int_{1-\frac{1}{n}}^1 \sin(n\pi x) f\left(x + \frac{1}{n}\right) dx - \int_{-\frac{1}{n}}^0 \sin(n\pi x) f\left(x + \frac{1}{n}\right) dx - \int_0^1 \sin(n\pi x) f\left(x + \frac{1}{n}\right) dx$$

b2) Usando lo anterior y sumando las dos formas de I_n , pruebe que:

$$|2I_n| \leq \frac{2}{n}M(|f|) + \frac{1}{n}M(|f'|),$$

donde $M(|f|)$ y $M(|f'|)$ son los máximos de $|f|$ y $|f'|$ respectivamente, con esto concluya (2)

P3|

a) Demuestre que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n}\right)}$. Tomando logaritmo y usando

sumas de riemann, calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$

b) Considere $I_{n,m} = \int_0^1 (1-x)^x x^m dx$, con $n, m \in \mathbb{N}$

b1) Pruebe que, $\forall n \geq 1, \forall m \in \mathbb{N}$, $I_{n,m} = \frac{n}{m+1} I_{n-1,m+1}$

b2) Use lo anterior para calcular explícitamente el valor de $I_{n,m}$

c) Calcule la primitiva $\int \frac{x^2 - x + 1}{x(x^2 + 1)} dx$

Tiempo: 3 Horas|

Cálculo Diferencial e Integral - Control 2

Pauta Problema 1

a) $f(x) = x$, $g(x) = \sin x$, $a = 0$, $b = \pi$

Reemplazando en la ecuación (1) queda:

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx = 0 \cdot \int_0^1 \sin x \, dx + \pi \cdot \int_1^{\pi} \sin x \, dx = \pi \int_1^{\pi} \sin x \, dx = \pi (-\cos x) \Big|_1^{\pi}$$

Por partes $u = x \rightarrow du = dx$

$dv = \sin x \, dx \rightarrow v = -\cos x$

Entonces $\underbrace{-x \cos x \Big|_0^{\pi}}_{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \, dx = \pi(1 + \cos \{ \}) \rightarrow (1.5)$

$\pi + \sin x \Big|_0^{\pi} = \pi(1 + \cos \{ \}) \Rightarrow 1 + \cos \{ \} = 1 \Rightarrow \cos \{ \} = 0$

Así, $\{ = \frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$

$\rightarrow (0.5)$

b) Según indicación, sea $G(x) = \int_a^x g(t) \, dt$ donde g es continua y por lo tanto G es derivable en $G'(x) = g(x)$ (T.F.C.)

Entonces $\int_a^b f(x) g(x) \, dx = \int_a^b f(x) G'(x) \, dx$

Partes: $u = f(x) \rightarrow du = f'(x) \, dx$
 $dv = G'(x) \, dx \rightarrow v = G(x)$

$(1.0) \rightarrow$

Segue que $\int_a^b f(x) G'(x) \, dx = f(x) G(x) \Big|_a^b - \int_a^b G(x) f'(x) \, dx$

$(0.5) \rightarrow$ (como $G(a) = \int_a^a g = 0$) $= f(b)G(b) - f(a)G(a) - \int_a^b G(x) f'(x) \, dx$

Para $\int_a^b G(x) f'(x) \, dx$ donde G es continua y f' continua y por lo tanto integrable y de signo constante (monótona) se puede

$(0.5) \rightarrow$ aplicar el TVMG para integrales, es decir $\exists \xi \in [a, b]$ tal que

$\int_a^b G(x) f'(x) \, dx = G(\xi) \int_a^b f'(x) \, dx = G(\xi) (f(x) \Big|_a^b) = G(\xi) (f(b) - f(a))$

$(1.0) \rightarrow$

$$\begin{aligned} \text{On a } \int_a^b f(x)g(x)dx &= f(b)G(b) - G(a)(f(b) - f(a)) \\ &= f(a)G(a) + f(b)\underbrace{(G(b) - G(a))}_{\int_a^b g(x)dx} \end{aligned}$$

Se concluye que

1.0 →

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^b g(x)dx + f(b)\int_a^b g(x)dx$$

Pauta Problem 2

$$a) \int_0^1 \sin(m\pi x) dx = -\frac{1}{m\pi} \cos(m\pi x) \Big|_0^1 = -\frac{1}{m\pi} (\cos(m\pi) - 1) = \frac{1 - (-1)^m}{m\pi}$$

claramente $\int_0^1 \sin(m\pi x) dx \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \longrightarrow (0.5)$

$$\int_0^1 x \sin(m\pi x) dx = -\frac{x}{m\pi} \cos(m\pi x) \Big|_0^1 + \frac{1}{m\pi} \int_0^1 \cos(m\pi x) dx$$

Partes $u = x \rightarrow du = dx$

$$dv = \sin(m\pi x) dx \rightarrow v = -\frac{1}{m\pi} \cos(m\pi x)$$

$$= -\frac{(-1)^m}{m\pi} + \frac{1}{m^2\pi^2} \sin(m\pi x) \Big|_0^1 = -\frac{(-1)^m}{m\pi}$$

También es inmediato que $\int_0^1 x \sin(m\pi x) dx \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \longrightarrow (1.5)$

b) b1) $I_m = \int_0^1 \sin(m\pi x) f(x) dx$ con el cambio $x = u + \frac{1}{m}$, $dx = du$

$$I_m = \int_{-\frac{1}{m}}^{1-\frac{1}{m}} \sin[m\pi(u + \frac{1}{m})] f(u + \frac{1}{m}) du = \int_{-\frac{1}{m}}^{1-\frac{1}{m}} \sin(m\pi u + \pi) f(u + \frac{1}{m}) du$$

$$= - \int_{-\frac{1}{m}}^{1-\frac{1}{m}} \sin(m\pi u) f(u + \frac{1}{m}) du = \int_{1-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} \sin(m\pi u) f(u + \frac{1}{m}) du \longrightarrow (0.5)$$

y este último integral se puede descomponer como

$$I_m = \int_{1-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} = \int_{1-\frac{1}{m}}^1 + \int_1^0 + \int_0^{-\frac{1}{m}}$$

y arreglando signos queda

$$I_m = \int_{1-\frac{1}{m}}^1 \sin(m\pi x) f(x + \frac{1}{m}) dx - \int_{-\frac{1}{m}}^0 \sin(m\pi x) f(x + \frac{1}{m}) dx - \int_0^1 \sin(m\pi x) f(x + \frac{1}{m}) dx \longrightarrow (1.5)$$

b2) Sumando este forma de I_m con la original se tiene:

$$2I_m = \int_{1-\frac{1}{m}}^1 \sin(m\pi x) f(x + \frac{1}{m}) dx - \int_{-\frac{1}{m}}^0 \sin(m\pi x) f(x + \frac{1}{m}) dx - \int_0^1 \sin(m\pi x) f(x + \frac{1}{m}) dx + \int_0^1 \sin(m\pi x) f(x) dx$$

y agrupando los dos últimos integrales en una

$$2I_m = \int_{1-\frac{1}{m}}^1 \sin(m\pi x) f(x+\frac{1}{m}) dx - \int_{-\frac{1}{m}}^0 \sin(m\pi x) f(x+\frac{1}{m}) dx - \int_0^1 \sin(m\pi x) [f(x+\frac{1}{m}) - f(x)] dx \longrightarrow (0.5)$$

En la última integral, como f es continua en $[x, x+\frac{1}{m}]$ y derivable en $(x, x+\frac{1}{m})$, entonces por TVM (para derivadas)

$\exists \xi \in (x, x+\frac{1}{m})$ tal que $f(x+\frac{1}{m}) - f(x) = \frac{1}{m} f'(\xi)$, entonces

$$2I_m = \int_{1-\frac{1}{m}}^1 \sin(m\pi x) f(x+\frac{1}{m}) dx - \int_{-\frac{1}{m}}^0 \sin(m\pi x) f(x+\frac{1}{m}) dx - \frac{1}{m} \int_0^1 \sin(m\pi x) f'(\xi) dx \longrightarrow (0.5)$$

Finalmente, acotando $|2I_m|$ por la desigualdad Triangular, los integrales por $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$ y considerando $|\sin(m\pi x)| \leq 1$, $|f| \leq M(|f|)$ y $|f'| \leq M(|f'|)$ queda. $\longrightarrow (0.5)$

$$\begin{aligned} |2I_m| &\leq \int_{1-\frac{1}{m}}^1 |\sin(m\pi x)| |f(x+\frac{1}{m})| dx + \int_{-\frac{1}{m}}^0 |\sin(m\pi x)| |f(x+\frac{1}{m})| dx + \frac{1}{m} \int_0^1 |\sin(m\pi x)| |f'(\xi)| dx \\ &\leq M(|f|) \int_{1-\frac{1}{m}}^1 dx + M(|f|) \int_{-\frac{1}{m}}^0 dx + \frac{M(|f'|)}{m} \int_0^1 dx \\ &= \frac{M(|f|)}{m} + \frac{M(|f|)}{m} + \frac{M(|f'|)}{m} = \frac{2}{m} M(|f|) + \frac{1}{m} M(|f'|) \end{aligned}$$

Finalmente se concluye $0 \leq |I_m| \leq \frac{M(|f|)}{m} + \frac{M(|f'|)}{2m}$

$$\text{de donde } I_m = \int_0^1 \sin(m\pi x) f(x) dx \longrightarrow 0 \longrightarrow (0.5)$$

Pauta Problema 3

$$a) \quad \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n^n n!}} = \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}{n \cdot n \cdot n \dots n}} = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\dots\left(1+\frac{n}{n}\right)}$$

$$\text{Así } \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \left(1+\frac{i}{n}\right)}$$

$$\text{Entonces } \ln \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = \ln \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \left(1+\frac{i}{n}\right)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln\left(1+\frac{i}{n}\right) \rightarrow (0.5)$$

$$\text{Entonces } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\ln \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln\left(1+\frac{i}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \ln\left(1+\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}$$

Este último es una suma de Riemann donde $x_i = 1+\frac{i}{n}$, $\frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$

de donde $b-a=1$, $a=1$, $b=2$

$$\text{Así } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\ln \left(\frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} \right) \right] = \int_1^2 \ln x \, dx = x \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 1 \, dx = 2 \ln 2 - 1$$

$$\text{Partes } u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = dx \rightarrow v = x$$

$\rightarrow (1.0)$

Recordar que si $\ln(s_n) \rightarrow L \Rightarrow s_n \rightarrow e^L$

$$\text{Entonces } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} \right) = e^{2 \ln 2 - 1} = e^{\ln 4 - 1} = \frac{4}{e} \rightarrow (0.5)$$

$$b) \quad b1) \quad I_{n,m} = \int_0^1 (1-x)^n x^m \, dx = \frac{x^{m+1} (1-x)^n}{m+1} \Big|_0^1 + \frac{n}{m+1} \int_0^1 (1-x)^{n-1} x^{m+1} \, dx$$

$$\text{Partes } u = (1-x)^n \rightarrow du = -n(1-x)^{n-1} dx$$

$$dv = x^{m+1} dx \rightarrow v = \frac{x^{m+2}}{m+2}$$

$$\text{Segue que } I_{n,m} = \frac{n}{m+1} I_{n-1,m+1} \rightarrow (1.0)$$

$$b2) \quad I_{n,m} = \frac{n}{m+1} I_{n-1,m+1} = \frac{n(n-1)}{(m+1)(m+2)} I_{n-2,m+2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{(m+1)(m+2)(m+3)} I_{n-3,m+3} = \dots = \frac{n(n-1)\dots 2 \cdot 1}{(m+1)\dots(m+n)} I_{0,m+n} = \frac{n!}{(m+1)\dots(m+n)} \int_0^1 x^{m+n} \, dx \rightarrow (0.5)$$

$$\text{Def } I_{m,m} = \frac{n!}{(m+1) \cdots (m+n)} \cdot \frac{x^{m+m+1}}{m+m+1} \Big|_0^1 = \frac{n!}{(m+1)(m+2) \cdots (m+m+1)} \cdot \frac{1}{1} \cdot m!$$

$$I_{m,m} = \frac{n! \cdot m!}{(m+m+1)!} \longrightarrow \textcircled{0.5}$$

c) $\int \frac{x^2 - x + 1}{x(x^2 + 1)} dx$. Fracciones Parciales

0.5 →

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{x^2 - x + 1}{x(x^2+1)} \quad \left\{ \begin{array}{l} A+B=1 \\ C=-1 \\ A=1, B=0 \end{array} \right.$$

1.5 → $\int \frac{x^2 - x + 1}{x(x^2+1)} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \ln|x| - \arctan x + C$

Alternative.

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{x(x^2+1)} dx = \int \left[\frac{\cancel{x^2+1}}{\cancel{x}(\cancel{x^2+1})} - \frac{\cancel{x}}{x(x^2+1)} \right] dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx$$

2.0 pts

$$= \ln|x| - \arctan x + C$$